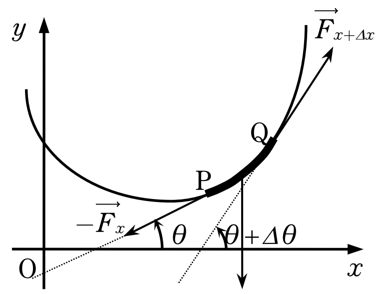
電線は懸垂線（Catenary：カテナリー）

ひもの両端を空中に固定して，ひもを静かに垂らすとひもは静止してある曲線を描く。これは，放物線でも双曲線でもなく，懸垂線（カテナリー）と呼ばれる曲線である。その方程式を求めてみよう。



ひもは，理想化されたものとして考えることにする。すなわち，自由に曲がり，伸び縮みしない密度が一様なものと考える。

座標軸を適当にとって，この曲線の方程式を $y=f(x)$とする。ひもの各点に張力が働いているので，点 $\mathrm{P}(x, f(x))$において，右側が左側に及ぼす張力を $\overrightarrow{F_x}$ とし，その大きさを F_xとする。$\overrightarrow{F_x}$ は点 P における $y=f(x)$の接線と平行である。

点 P と $Q(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$の間のひもの断片を$\Delta C$ とし，点 P, Q における接線と x 軸とのなす角をそれぞれ$\theta, \theta+\Delta\theta$とする。断片$\Delta C$ の長さをΔs とすれば，密度が一様であることからΔC の重さは，$\mu\Delta s$（μは定数）と表される。ここで，鉛直方向と水平方向に分けて力のつり合いを式で表せば，

$$F_{x+\Delta x}\sin(\theta+\Delta\theta)=F_x\sin\theta+\mu g\Delta s \qquad \cdots\cdots ① \qquad (\text{鉛直方向})$$

$$F_{x+\Delta x}\cos(\theta+\Delta\theta)=F_x\cos\theta \qquad \cdots\cdots ② \qquad (\text{水平方向})$$

②より，水平方向の力は，点 P の位置に関係なく一定である。そこで，$F_x\cos\theta=F$（F は定数）とおいて，①の両辺を②の両辺で割ると，

$$\tan(\theta+\Delta\theta)=\tan\theta+\frac{\mu g}{F}\Delta s \qquad \therefore \quad \frac{\tan(\theta+\Delta\theta)-\tan\theta}{\Delta\theta}=\frac{\mu g}{F}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta\theta}$$

$\dfrac{\mu g}{F}=k$ とおいて，$\Delta\theta\to 0$ とすると $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=k\dfrac{ds}{d\theta}$ ……③ が得られる。

弦 PQ の長さをΔl とすると，$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta l}=1$，$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta l}{\Delta x}=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$ である。また，$\tan\theta=f'(x)$であり，この両辺を x について微分すると，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dx}=f''(x)$となる。③より，$k\dfrac{ds}{d\theta}\cdot\dfrac{d\theta}{dx}=f''(x)$ だから，$k\dfrac{ds}{dx}=f''(x)$ となる。

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta s}{\Delta l}\cdot\frac{\Delta l}{\Delta x} \to \sqrt{1+\{f'(x)\}^2} \quad (\Delta x\to 0)$$

であるから，$f''(x)=k\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}$ である。

ここで，$f'(x)=u$ とおくと，$\dfrac{du}{dx}=k\sqrt{1+u^2}$ だから，$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du=k\int dx$

$$\therefore \quad \log\left(\sqrt{1+u^2}+u\right)=kx+C_1 \qquad (\sqrt{1+u^2}=t-u \text{ または } u=\tan t \text{ と置換する})$$

$\sqrt{1+u^2}+u=e^{kx+C1}$ より，$1+u^2=(e^{kx+C1}-u)^2$ $\qquad \therefore\ u=\dfrac{1}{2}\left(e^{kx+C_1}-e^{-(kx+C_1)}\right)$

$$\therefore \quad f(x)=\int u\,dx=\frac{1}{2k}\left(e^{kx+C_1}+e^{-(kx+C_1)}\right)+C_2$$

これが，懸垂線の方程式である。普通は，懸垂線といえば $y=\dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ で表す。